

LENTES GRAVITACIONALES: “EJEMPLOS NUMÉRICOS”

Rosa M. Ros – Atrévete con el Universo

La luz siempre sigue el camino más corto posible entre dos puntos. Pero si una masa esta presente, el espacio se curva, y entonces el camino mas corto posible es una curva como se puede ver en la figura 1.

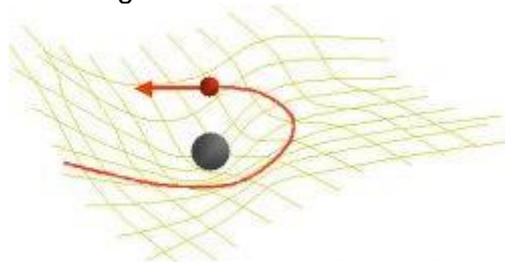


Figura 1: Deformación del espacio por un objeto masivo

Einstein predijo que una estrella situada en un primer plano podría magnificar la imagen de una estrella del fondo estelar. Pero era escéptico respecto a que esta ilusión pudiera ser vista jamás. Lo consideró demasiado improbable como para tener un interés práctico. No fue hasta 1979 que los astrónomos vieron realmente la evidencia de las lentes gravitacionales. El estudio de estas lentes puede ser considerado todavía como una joven ciencia observacional.

Ángulo de desviación según la teoría de Newton

Consideramos un fotón que pasa cerca del deflector de masa M y sea v_p la componente perpendicular (a la trayectoria original) de la velocidad del fotón (v_p no es la velocidad total del fotón). Asumimos que la masa de fotón es el $m = 1$, entonces la fuerza es igual a la aceleración $f = \frac{dv_p}{dt}$. Según la teoría de Newton, con $m = 1$, la componente de la fuerza perpendicular a la trayectoria del fotón será, de acuerdo con la figura 2a. $f = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$ Igualando ambas relaciones,

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$$

Si introducimos $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ y $\sin \theta = \frac{a}{r}$ por la geometría de la figura 2a, obtenemos $dv_p = GM \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$. Como la desviación del fotón es pequeña, se tiene $v_p \ll c$, y como $c = dx/dt$ e integrando obtenemos

y la integral verifica,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + a^2)^{-3/2} dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2}{a^2}$$

Después de sustituir e integrar, tenemos,

$$v_p = \frac{2GM}{ac}$$

Y obtenemos el “ángulo α de desviación”, según Newton, $\alpha = v/c$

$$\alpha = \frac{2GM}{ac^2}$$

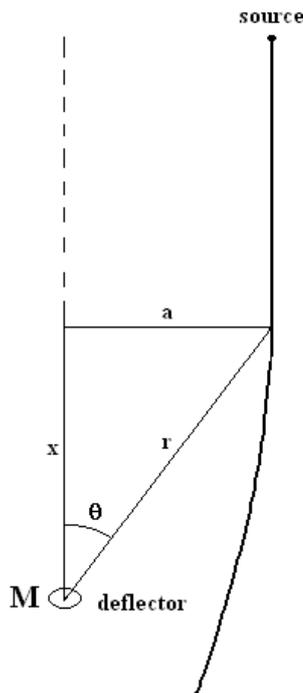


Figura 2a. Trayectoria del fotón próximo al deflector.

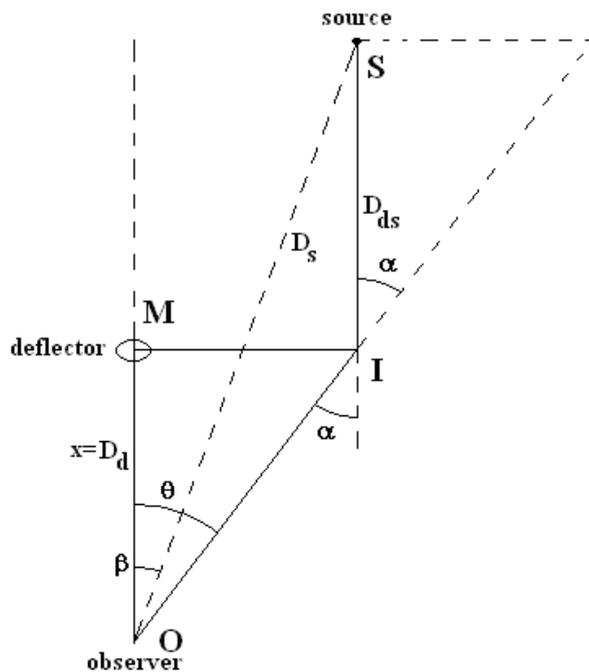


Figura 2b. Geometría del rayo de luz.

Ángulo de desviación según la teoría de Einstein

En el caso relativista, la gravedad actúa sobre la componente espacial y también sobre la componente temporal, y el ángulo de desviación es el doble que en el caso clásico. Entonces, el ángulo de desviación en teoría de relatividad es:

$$\alpha = \frac{4GM}{ac^2}$$

El ángulo de desviación es directamente proporcional a la masa del deflector.

- Ángulo de desviación característico α_0 y la posición θ de la lente

En la figura 2b, del triángulo OSI se deduce, $\frac{\sin(180-\alpha)}{D_s} = \frac{\sin(\theta-\beta)}{D_{d_s}}$

Se verifica $\sin(180-\alpha) = \sin \alpha$ y para ángulos pequeños, aproximamos el seno a su ángulo, así deducimos $\beta = \theta - \frac{D_{d_s}}{D_s} \alpha$. Por la geometría del problema, $\tan \theta = a/D_d$, y teniendo en cuenta que θ es muy pequeño, $\theta \approx \tan \theta$, y sustituyendo $a=D_d \theta$ en la relación anterior y al expresión calculada para α previamente se obtiene $\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{d_s}}{D_s D_d} \frac{1}{\theta}$

Finalmente introduciendo el “ángulo característico de desviación” α_0 como un valor que solo depende de la masa del deflector y las distancias a la fuente y al deflector,

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{d_s}}{D_s D_d}}$$

Donde deducimos, $\theta = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{4\alpha_0^2 + \beta^2} \right)$. Luego para cada β hay mas de un θ .

Resumiendo, θ da la posición de la lente dependiendo de la posición real de la fuente β y α_0 .

- Radio de Einstein

Para el caso especial en que la fuente S este detrás de la lente o deflector ($\beta = 0$ en figura 2b), debido a la simetría, se forma un anillo cuyo radio es llamado “Radio de Einstein θ_E ”.

$$\theta_E = \alpha_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{d_s}}{D_s D_d}}$$

En el caso que la fuente S y la masa de deflector M está en la línea, $\beta = 0$, podemos observar arcos circulares alrededor de la masa de deflector. Es posible medir el radio de este círculo y si las distancias son conocidas es posible calcular la masa.

Ejemplos Numéricos

Ejemplo 1. Repitiendo el cálculo del eclipse solar de 1919

Según la teoría newtoniana de la gravedad, la fuerza de atracción del Sol podría doblar los rayos de luz de las estrellas lejanas y esta desviación debía ser de 0.875 segundos de arco. Según la teoría de la relatividad esta desviación es el doble. Arthur Eddington midió este efecto en 1,75 segundos de arco y confirmó la predicción de Einstein durante el eclipse solar de mayo de 1919 (figura 3).

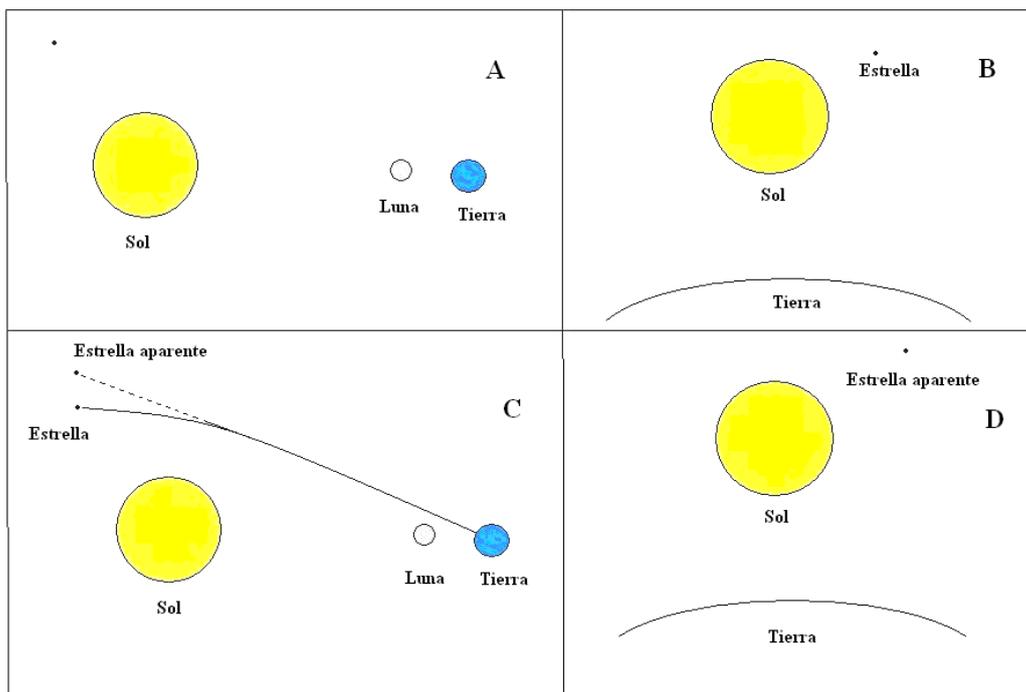


Figura 3: En la figura A se muestra una vista lateral del eclipse solar. En la B aparece una vista frontal desde la Tierra con una estrella a la derecha del Sol. Si se tiene en cuenta la predicción de Einstein en la vista lateral (figura C) la estrella parece estar mas lejos del Sol que en su posición real. Para el observador desde la Tierra (figura D) la estrella parece estar aparentemente más alejada del Sol que en su posición real (figura B).

Calculad los dos valores del ángulo de desviación (según Newton y Einstein) usando la gravitación universal constante $G=6.67 \cdot 10^{-11}$ en el sistema de MKS, la velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, masa solar $M_S = 1.9891 \cdot 10^{30}$ kg y el radio solar $R_S = 698000$ km.

Resultados según Newton. $\alpha = 0.004224 \times 10^{-3}$ radianes $\times 2 \times 10^5$ segundos de arco = 0.84 segundos de arco (usando que 1 radian = 2×10^5 segundos de arco)

Resultados según Einstein $\alpha = 0.008448 \times 10^{-3}$ radianes $\times 2 \times 10^5$ segundos de arco = 1.68 segundos de arco (usando que 1 radian = 2×10^5 segundos de arco)

Ejemplo2. “Microlensing”, “Macrolensing” y Radio de Einstein

Dependiendo de la masa del deflector y de su distancia, la luz se desvía más o menos y se tiene un fenómeno de lente gravitacional en pequeña o gran escala: “microlensing” o “macrolensing”. Si se da simetría axial y en presencia de un deflector eficiente, y si el observador este situado en el eje de simetría se verá el anillo de Einstein. Calcularemos el radio del anillo en dos casos: una estrella no muy lejana y un cúmulo mucho más masivo y lejano.

Calculad los valores del radio de Einstein (por microlensing y macrolensing) usando la constante de gravitación universal $G=6.67 \cdot 10^{-11}$ en el sistema de MKS, la velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s y

- Para una estrella con masa de orden de $1 M_S$ y situada a pocos kpc (en distancias galácticas),
- Para un cúmulo denso con masa acerca de $10^{14} M_S$ a una distancia de 10^9 pc

(Notad que un ángulo no tiene dimensiones, el valor obtenido está en radianes. Para obtenerlo en segundos de arco, hay que considerar que 1 radián = $2 \cdot 10^5$ segundos de arco).

Como la distancia a es mucho mas pequeña si la comparamos con las distancias D_{ds} , D_d , D_s , suponemos que en la práctica $D_s = D_d + D_{ds}$ Para simplificar todavía mas los cálculos en los ejemplos sugeridos, consideraremos que la distancia a la fuente es dos veces la distancia al deflector, $D_s = 2 D_d$ (1 parsec = 1 pc = 3.262 años luz = $3.086 \cdot 10^{16}$ m)

El radio de Einstein θ_E en este caso verifica $\theta_E = \sqrt{\frac{2G M}{c^2 D_d}}$

- Estrella $\theta_E = 3.09 \cdot 10^{-9}$ radianes = $6.2 \cdot 10^{-4}$ segundos de arco
- Núcleo del cúmulo $\theta_E = 9.78 \cdot 10^{-5}$ radianes = 19.56 segundos de arco

Para la estrella el radio típico de Einstein sería del orden de unos milisegundos (microlensing), en consecuencia separar imágenes en acontecimientos de microlensing es difícil. Para el cúmulo, de acuerdo con la observación, debería ser tan grande como 20 segundos de arco (macrolensing). Como se puede observar los resultados obtenidos se corresponden muy bien con los que deberían ser según la observación.

Ejemplo 3. Primer planeta extrasolar detectado por “microlensing”

Por un período de cerca de una semana (del 17 al 21 de julio de 2003) la curva de luz del objeto “OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53” sufrió una alteración que motivó que pareciera que correspondía a un sistema doble con una componente de sólo $0,4$ % de la masa del componente más pesada, lo que implicaba que la componente más ligera debía ser un planeta (figura 4). El 15 de abril de 2004 dos equipos diferentes y por separado (los equipos OGLE y MOA) anunciaron el descubrimiento de un planeta fuera de nuestro sistema solar situado a 17000 años luz. La estrella del fondo estaba a 24000 años luz. La masa de la estrella era $0.36 M_S$ y el radio de Einstein era de cerca de medio mili-arcosegundo. (El planeta descubierto era de unas $1,5$ veces la masa de Júpiter y presumiblemente de tipo gaseoso. Dando vueltas a la estrella a 3 au, recordemos que Júpiter esta a $5,2$ au del Sol).

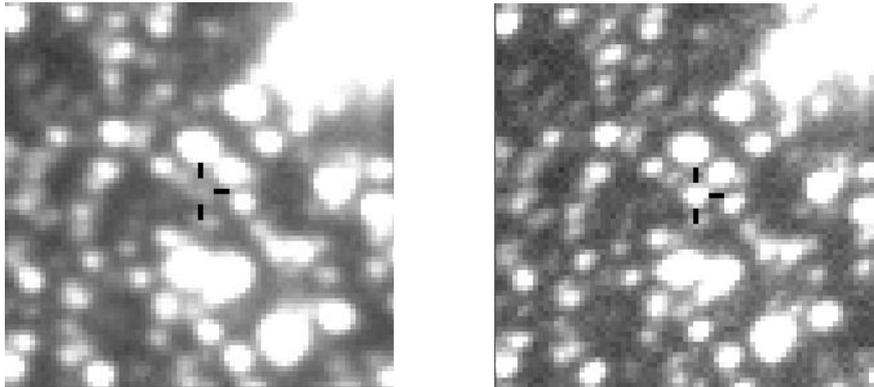


Figura 4. Cambios de brillo en una estrella producida por una estrella invisible con su invisible plantea extrasolar OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53 (sin aumentar (izquierda) aumentado (derecha)).

Calculad el radio de Einstein θ_E usando $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $M = 0.36 M_S$, $D_d = 17000$ a.l. y $D_s = 24000$ a.l. En el caso de microlensing, asumiremos que a es muy pequeño si comparamos con las distancias D_{ds} , D_d , D_s y suponemos que en la practica, $D_s = D_d + D_{ds}$ Finalmente verificad que el θ_E obtenido es del orden de medio mili-arcosegundo.

Entonces, $D_{d_s} = D_s - D_d = 22704 \cdot 10^{16} - 16084 \cdot 10^{16} = 6620 \cdot 10^{16}$ m

Y el radio de Einstein $\theta_E = 0.2 \cdot 10^{-8}$ radianes. Si tenemos en cuenta que 1 radian = $2 \times 10^5 \theta_E = 0'' \cdot 4 \cdot 10^{-3}$ segundos de arco. Es decir medio milisegundo

Ejemplo 4. Casi perfecto anillo de Einstein por “macrolensing”

Hay dos requisitos necesarios para observar los anillos de Einstein: 1) la distribución de masa de la lente debe ser axialmente simétrica, vista desde el observador, y 2) la lente y la fuente detrás de ella deben estar en línea recta desde el punto de vista del observador. Es difícil que se de esta situación geométrica, pero observando por el ESO-VTL en Chile (figura 5), el astrónomo Remi Cabanac encontró uno de los lentes más completos jamás descubierto: un casi perfecto anillo de Einstein, aumentando una galaxia lejana con una claridad increíble. El anillo inscribe un círculo “en forma de C” de 270 grados en una casi completa circunferencia con un radio aparente levemente superior a 1,75 segundos de arco. La galaxia lente es una elíptica gigante semejante a M87 en el grupo de Virgo-Coma.

La galaxia que actúa de lente esta situada a casi 8.000 millones de año luz de nosotros en la dirección de la constelación de Formax, mientras la galaxia fuente cuya luz es desviada, esta mucho más lejos, a 12.000 millones de años luz. Así pues, vemos esta galaxia como fue cuando el universo tenía sólo 12% de su edad actual. La lente aumenta la fuente casi 13 veces. (Galaxia fuente y lente ha recibido la designación FOR J0332-3557 en el cúmulo de galaxias de Formax).

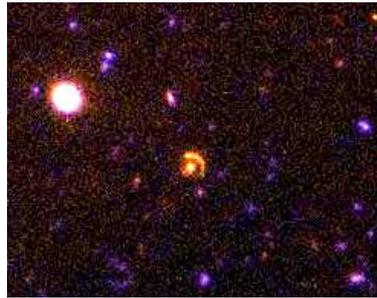


Figura 5. Casi perfecto "Anillo de Einstein" (ESO/VLT).

Calculad la Masa de la galaxia elíptica gigante llamada FOR J0332-3557 usando $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\theta_E = 1''.75$, $D_d = 8 \cdot 10^9$ a.l. y $D_s = 12 \cdot 10^9$ a.l. En el caso de macrolensing, asumiremos que, $D_s = D_d + D_{ds}$ Finalmente verificad que la masa obtenida es semejante a M87, es decir aproximadamente de $10^{12} M_s$.

En el caso de macrolensing $D_{ds} = D_s - D_d = 11.35 \cdot 10^{25} - 7.57 \cdot 10^{25} = 3.78 \cdot 10^{25}$ m
Podemos calcular la masa de una galaxia que actúa de lente usando el radio

de Einstein $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s D_d}}$ y despejar la masa

$M = 5.55 \cdot 10^{42}$ Kg = $2.75 \cdot 10^{12} M_s$ De acuerdo con la masa de M87. El diámetro M87, aparentemente de unos 7 minutos de arco corresponde a una extensión lineal de 120.000 años luz, más que el diámetro del disco de nuestra Vía Láctea. Sin embargo, como M87 es del tipo E1 o E0, llena un volumen mucho más grande, y así contiene muchas más estrellas (y masa) que nuestra galaxia, se ha estimado $2,7 \cdot 10^{12}$ masas solares. Esta galaxia es también de luminosidad extrema, con una magnitud absoluta de acerca de -22.

La lentes gravitacionales proporcionan un instrumento muy útil con que estudiar el Universo. Como "balanza", nos proporciona una medida de la masa del cuerpo que actúa de lente, y como "cristal de aumento", nos permite ver detalles en objetos que de otro modo estarían más allá del alcance de telescopios actuales.

BIBLIOGRAFÍA

- R.M. Ros, Experiments and exercises involving gravitational lenses, *Proceedings 1st ESO-EAAE Astronomy Summer School*, Barcelona 2007
- R.M. Ros, Gravitational Lenses in the classroom, *Physics Education*, 43, Bristol, 2008
- R.M. Ros, What kind of astronomy should be taught at the beginning of the 21st century? *Proceedings of IAU 1st MEARIM Congress*, Cairo, 2008 (in press)